EPREUVE DE MATHEMATIQUES I

Durée : 3 heures

Filière MP, PC, PSI

ETUDE DE FAMILLES ORTHOGONALES DE POLYNOMES

Dans tous le problème $E = R[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = R_n[X]$ le sous-espace vectoriel de E, formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Les deux parties sont indépendantes.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$

Première partie.

On considère la forme linéaire L définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ L(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

On considère la forme bilinéaire φ définie sur E^2 par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = L(P.Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt .$$

1) a) Justifier l'existence de $L(P)$ et $\varphi(P,Q)$.

b) Montrer que φ est définie positive.

c) Calculer : $\forall n \in N,\ L(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.(On exprimera le résultat à l'aide des factorielles).

2) $\forall n \in N$, on considère les équations différentielles:

(A_n) : $y'' - xy' + ny = 0$,

(B_n) : $y'' + xy' + (n+1)y = 0$.

Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des solutions de (A_n) et $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des solutions de (B_n).
On remarquera que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ sont des espaces vectoriels de dimension deux.

a) Trouvez les polynômes qui sont solutions de (A_n)

b) Trouver les solutions de (A_n) développables en séries entières.

3) Soit θ l'application définie sur $\mathcal{A}_n$ par :

$$\forall g \in \mathcal{A}_n \ , \ \forall x \in R \ , \ \theta(g)(x) = g(x)\ e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Montrer que θ établit une bijection de $\mathcal{A}_n$ sur $\mathcal{B}_n$.

4) f étant la fonction définie par : $\forall x \in R$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Montrer que : $g_n = \dfrac{d^n}{dx^n}(f)$ appartient à $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que la fonction P_n définie par : $\forall x \in R$, $P_n(x) = g_n(x)\ e^{+\frac{x^2}{2}}$ est solution de (A_n)

5) a) Calculer P_0 , P_1 , P_2 .

b) Montrer que : $\forall n \in N$, $P'_{n+1} = -(n+1)P_n$.

c) Montrez que : $\forall n \in N$, $P_n \in E_n$.

6) Montrer que si $(Q_1, Q_2) \in E^2$ on a la relation :

$$\varphi(Q_1, Q_2'' - xQ_2') = -\varphi(Q_1', Q_2') = \varphi(Q_1'' - xQ_1', Q_2)$$

En déduire que : $\forall (n,m) \in N^2$, $n \neq m \Rightarrow \varphi(P_n, P_m) = 0$.

7) Calculer $\varphi(P_n, P_n)$.

Deuxième partie.

Soit h la fonction définie sur] -1, 1[par : $\forall t \in]-1, 1[$, $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Soit g la fonction définie sur [-1, 1] par : $\forall t \in [-1, 1]$, $g(t) = \text{Arc cos } t$.

1) a) Montrer que : $\forall n \in N$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^n\, h(x)\, dx$ existe.

b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in N}$, telle que :

$$\forall n \in N, \ \forall \alpha \in R \ , \ \cos n\alpha = Q_n(\cos\alpha) .$$

c) Montrer que la suite $(Q_n)_{n \in N}$ vérifie :

i) $\forall n \in N \quad Q_n \in E_n$.

ii) $\forall (n,m) \in N^2$, $n \neq m \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q_m(t)h(t)dt = 0$.

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n^2(t)\, h(t)\, dt \neq 0$

d) Calculer Q_1 , Q_2 , Q_3 et $\forall n \in N \quad \int_{-1}^{1} Q_n^2(t)\, h(t)\, dt$.

2) a) Montrer , pour tout entier n , l'existence de $\lambda_n = \int_{-1}^{1} R_n(t)\, g(t)\, h(t)\, dt$.

ou R_n est le polynôme défini par : $R_n = \dfrac{Q_n}{\sqrt{\int_{-1}^{1} Q_n^2(t) h(t) dt}}$.

b) Pour tout entier n calculer la valeur de λ_n .

3) Calculer $\int_{-1}^{1} g^2(t)\, h(t)\, dt$.

4) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k R_k$. Montrer que :

$$\forall P \in E_n , \quad \int_{-1}^{1} (g(t) - S_n(t))\, P(t) h(t)\, dt = 0 .$$

5) Soit $(\mu_0 , \mu_1 , ... , \mu_n) \in R^{n+1}$ tel que : $(\mu_0 , \mu_1 , ... , \mu_n) \neq (\lambda_0 , \lambda_1 , ... , \lambda_n)$.

On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_k R_k$.

a) Montrer que : $\int_{-1}^{1} [g(t) - S_n(t)]^2 h(t)\, dt < \int_{-1}^{1} [g(t) - T_n(t)]^2 h(t)\, dt$

b) Montrer que: $\sum_{k=0}^{+n} \lambda_k^2 \leq \int_{-1}^{1} g^2(t) h(t)\, dt$.

6) Montrer que : $\int_{-1}^{1} (g(t) - S_n(t))^2 h(t)\, dt$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini

et que $\int_{-1}^{1} g^2(t) h(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2$.

7) En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail